École Supérieure de Gestion

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR TECHNIQUE PRIVÉ

CONCOURS D'ENTREE 1986

CONCOURS Formule G

Epreuve de MATHEMATIQUES I **Durée : 4 h Coéfficient : 3**

VENDREDI 18 AVRIL 1986 de 14 H à 18 H

ALGEBRE

PROBLEME N° I :

1°) Montrer que le polynôme à coefficients réels

$P(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24$

a une racine multiple d'ordre 3, que l'on précisera.

Décomposer P(x) en un produit de polynômes du premier degré.

2°) On désigne par E un espace vectoriel de dimension 4 par :

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E. Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$u(e_1) = -2e_2 + 2e_3 - 5e_4$
$u(e_2) = -3e_1 + 2e_3 - 6e_4$
$u(e_3) = -e_1 + 3e_3 - e_4$
$u(e_4) = e_1 + 2e_2 - e_3 + 6e_4$

On désigne par Id_E l'application identique de E dans E. Montrer que le sous-espace vectoriel F de E engendré par les vecteurs :

$\{a_1 = e_1 - e_2 , a_2 = e_2 + e_4 , a_3 = e_3\}$

est stable pour l'endomorphisme $v = 2Id_E - u$ (c'est à dire que $v(F) \subset F$)

On appelle ω la restriction de v à F. Vérifier que $\omega^2 \neq 0$ et que $\omega^3 = 0$.

Montrer que le vecteur $f_1 = 2e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ appartient à F.

On pose $f_2 = -\omega(f_1)$, $f_3 = -\omega(f_2)$.

Les vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ sont ils linéairement indépendants ?

3°) a) - Déterminer les nombres réels a,b,et c pour que le vecteur $f_4 = e_1 + ae_2 + be_3 + ce_4$ appartienne au noyau de l'endomorphisme :
$s = 3\,Id_E - u$

b) - Montrer que les vecteurs $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ forment une base de E.

Quelle est la matrice B de l'endomorphisme u dans cette base ? (On remarquera que $s(f_4) = 0$).

c) - Quelles sont les matrices de passage entre les bases $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$?

4°) a) - Si r est nombre réel, montrer que l'endomorphisme $u_r = r\,Id_E - u$ est inversible si et seulement si, $P(r) \neq 0$.

b) - Déterminer le rang de u_r, en fonction de r.

5°) Montrer que les matrices réelles suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ commutent.}$$

Calculer B^n avec $n \in \mathbb{N}$.

PROBLEME N° II :

1°) Soit $a \in \mathbb{C}$, Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$(z + 1)^n = \cos na + i \sin na$

Représenter graphiquement l'image de ses racines.

2°) Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$ calculer la somme suivante :

$Sn = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos(n-1)x$

en faisant apparaître Sn comme la partie réelle d'une série géométrique de nombres complexes.

ANALYSE

PROBLEME N° I :

On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, des fonctions numériques, définies et continues sur $\mathbb{R}$ et l'on considère l'application de $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, qui, à la fonction f, fait correspondre la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

On appelle la fonction g ainsi obtenue la transformée de f.

1°) a) - Montrer que la transformée g de tout fonction f de $\mathcal{E}$ est une fonction dérivable en tout point et qu'elle admet à l'origine une dérivée seconde que l'on calculera.

b) - Montrer que l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ ainsi définie est une application linéaire.
Déterminer son noyau.
Est-elle injective ? Surjective ?

c) - Montrer que si f est une fonction paire ou impaire, sa transformée g possède la même propriété.
Déterminer la transformée de la fonction h définie par :
$h(x) = f(kx)$
en fonction de celle de f, k étant une constante réelle.

2°) a) - Calculer les transformées des fonctions :

$$x \longmapsto x\,\mathrm{Arctg}(x)$$

$$x \longmapsto \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

b) - Soit In la transformée de la fonction $x \longmapsto x^n \sin x$.
Etablir une relation de récurrence permettant de calculer In à partir de I_0, et de I_1, pour tout entier n.

3°) a) - Soit z la transformée de la fonction $x \longmapsto \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

Montrer que z admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de l'origine, sans expliciter z. Le calculer pour n = 7.

b) - Calculer, à l'aide d'un changement de variable, la transformée, y, de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{x^2 + 2}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$$

Construire, relativement à un repère orthornormé du plan affine, le graphe de la fonction, y, en étudiant avec soin les branches infinies, la concavité et les tangentes aux points d'inflexion.

4°) Soit h une fonction numérique possédant une dérivée continue dans $\mathbb{R}$.
La fonction h étant fixée, on se propose de déterminer les fonctions f de $\mathcal{E}$ vérifiant l'équation :

$$(1) : f(x) - \int_0^x t\, f(t)dt = h(x)$$

a) - Montrer que si f vérifie (1), elle est alors solution de l'équation :
$f'(x) - x\, f(x) = h'(x)$ avec $f(0) = h(0)$

b) - Prouver que $f(x) = h(x) + e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x h(t)\, t\, e^{\frac{-t^2}{2}} dt$

faire le calcul avec $h(x) = x^2 \quad (x^2 + 1)$

PROBLEME N° II :

$(x^{\frac{1}{x}})$

Soit $f(x) = x$

1°) Montrer que $f'(x) \simeq \frac{f(x)}{x}$ quand $x \longmapsto +\infty$

2°) On pose $h(x) = f(x + 1) - f(x)$; calculer $\lim_{x \mapsto +\infty} h(x)$